28/4/17 Μαθημα 13ο

φυλλαδιο 4ο

5) $Y, H \leq G$, $H \triangleleft G \Rightarrow Y \cap H \triangleleft Y$

$a \in Y \cap H$ και $b \in Y$. Θελουμε $bab^{-1} \in Y \cap H$

$\left.\begin{array}{l} b, a \in Y \Rightarrow bab^{-1} \in Y \\ H \triangleleft G \Rightarrow bab^{-1} \in H \end{array}\right\} \Rightarrow Y \cap H \triangleleft Y$

6) $Y, H \leq G$, $H \triangleleft G \Rightarrow HY \leq G$

$HY = \{ha \mid h \in H, a \in Y\}$

$h_1 a_1 h_2 a_2 = h_3 a_3$

$a_1 h_2 a_1^{-1} = h_3$ γιατι $H \triangleleft G$

$a_1 h_2 = h_3 a_1$

$h_1 a_1 h_2 a_2 = h_1 h_3 a_1 a_2 = ha \in HY$

$(h_1 a_1)^{-1} \in HY$

$a_1^{-1} h_1^{-1} a_1 = h_2 \Rightarrow a_1^{-1} h_1^{-1} = h_2 a_1^{-1} \in HY$

Αρα $HY \leq G$

7) $H \triangleleft G$, $a \in G \Rightarrow o(Ha) \mid o(a)$

G/H ομαδα, $o(Ha) = k \Leftrightarrow (Ha)^k = H \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow Ha^k = H \Leftrightarrow a^k \in H$ και k ελαχιστο

$o(a) = m \Leftrightarrow a^m = 1_G$ m ελαχιστο

$(Ha)^m = Ha^m = H1_G = H \xRightarrow{\text{Θεω.}} o(Ha) \mid m = o(a)$

8) $(\mathbb{Q}, +)$ $\mathbb{Z} \leq \mathbb{Q}$ αβελιανη

$\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \{r + \mathbb{Z} \mid r \in \mathbb{Q}\} = \{r - [r] + \mathbb{Z} \mid r \in \mathbb{Q}\} =$

$3{,}5 + \mathbb{Z} = 0.5 + \mathbb{Z}$ $\frac{1}{p}$ p πρωτος

$= \{ r' + \mathbb{Z} \mid r' \in [0,1) \cap \mathbb{Q} \}$

$r' \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow r' = \frac{p}{q} \quad 0 < p > q \quad (p,q) = 1$

$r' = 0 \Rightarrow (r' + \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \Rightarrow o(r' + \mathbb{Z}) = 1$

$$\underbrace{\left(\frac{p}{q} + \mathbb{Z}\right) + \dots + \left(\frac{p}{q} + \mathbb{Z}\right)}_{q-\text{φορες}} = \frac{qp}{q} + \mathbb{Z}$$

Συμφωνα με το 7) εχουμε:

$o\left(\frac{p}{q} + \mathbb{Z}\right) \mid q < \infty$ Αρα εχει πεπερασμενη ταξη

Επειδη $\exists$ απειροι πρωτοι $\Rightarrow \{ \frac{1}{p} \mid p$ πρωτοι$\}$ απειρο $\Rightarrow$

$\Rightarrow |\mathbb{Q}/\mathbb{Z}| = \infty$

9) G αβελιανη $Y \leq G \Rightarrow G/Y$ αβελιανη

G/Y ειναι ομαδα: $(Y \dot{+} a) + (Y \dot{+} b) = Y \dot{+} (a \dot{+} b) =$

$= Y \dot{+} (b \dot{+} a) = (Y \dot{+} b) + (Y \dot{+} a)$ Αρα αβελιανη

10) $H, K \leq G$ με $|H| = 5$ και $|K| = 12$

$\Rightarrow H \cap K = \{1_G\}$

$H \cap K \leq G \Rightarrow H \cap K \leq H, K \xRightarrow{\text{Lagrange}}$

$|H \cap K| \mid |H|, |K| \Rightarrow |H \cap K| \mid \underset{\text{ΜΚΔ}}{(|H|, |K|)} = (5, 12) = 1$

$|H \cap K| = 1 \Rightarrow H \cap K = \{1_G\}$

23

π, ρ

11) G ομάδα $|G| = \pi\rho$, πρώτοι διαφορετικοί
$\Rightarrow$ αν $Y \trianglelefteq G \Rightarrow Y$ κυκλική $\Rightarrow$ G κυκλική;

$|G| = 6$

G αβελιανή $\mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$

κυκλική τάξη $6 \Rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$

μη αβελιανή Σ_3 $\{1, f, f^2, g, fg, f^2g\}$

όχι καρτεσιανό γινόμενο

$Y \trianglelefteq G \Rightarrow |Y| \,\big|\, |G| = \pi\rho \Rightarrow |Y|$: $1 \Rightarrow Y = \{e_G\}$ (τετριμμένη); π, ρ πρώτοι $\Rightarrow Y$ κυκλική

Πρώτο Θεώρημα Ισομορφισμών

$\phi : G \to G$ επιμορφισμός ομάδων $\Rightarrow$
$\Phi : G/_{\ker\phi} \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} G$ ισομορφισμός

$\Phi(\alpha \ker\phi) = \phi(a)$

Αν $\phi : G \to G$ ομομορφισμός ομάδων
$\Phi : G/_{\ker\phi} \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} \phi(G)$

<u>Πρόταση</u>: Έστω $\phi: G \to G$ επιμορφισμός ομάδων. Τότε υπάρχει μια 1-1 και επί αντιστοιχία μεταξύ των υποομάδων της G <u>που περιέχουν</u> τον πυρήνα και των υποομάδων της G.
Ισχύει και για τις κανονικές

Λημμα: Αν H, K υποομαδες της G και H κανονική τοτε το συνολο HK είναι υποομαδα της G.

ΔΕΥΤΕΡΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΣΟΜΟΡΦΙΣΜΩΝ (χωρις αποδειξη)
Αν H, K υποομαδες της G και H κανονική τοτε ισχύει $HK/_{H} \cong K/_{(H\cap K)}$

$H \trianglelefteq G \Rightarrow G/H$ ομαδα
$\Rightarrow HK \leq G \Rightarrow \underset{10}{H}\underset{7}{K}/H_{10}$ ομαδα

Ασκηση: $H\cap K \trianglelefteq K \Rightarrow K/_{H\cap K}$ ομαδα.

Εφαρμογη: Ειμαι στο $\mathbb{Z}$ με υποομαδες:
$k\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$ ολες.

Αν: $2\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z} = \overset{??}{k}\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$
↳ είναι υποομαδα;; προφανως απο λημμα
Το $2\mathbb{Z}+3\mathbb{Z}$ είναι $\{2\lambda + 3\mu \mid \lambda, \mu \in \mathbb{Z}\}$
$2-3=-1$, $-2+3=1$ } ανηκουν στο $2\lambda+3\mu$
$1 = 3-2 \in 2\mathbb{Z}+3\mathbb{Z}$ διοτι
$3, 2 \in 2\mathbb{Z}+3\mathbb{Z}$ αρα $k=1$.

$n\mathbb{Z} + l\mathbb{Z} = k\mathbb{Z}$ $\quad k=(n,l) \Rightarrow k = an+bl$ με $a,b \in \mathbb{Z}$.
$an \in n\mathbb{Z}$, $bl \in l\mathbb{Z} \Rightarrow$
$an+bl \in n\mathbb{Z}+l\mathbb{Z} \Rightarrow k \in n\mathbb{Z}+l\mathbb{Z}$

$12\mathbb{Z}+15\mathbb{Z} = 3\mathbb{Z}$
$2\mathbb{Z}\cap 3\mathbb{Z} \leq k\mathbb{Z}$
↳ $2l = 3l'$ $\quad k=6$

$n\mathbb{Z} \cap l\mathbb{Z} = \text{ΕΚΠ}(n,l)\mathbb{Z}$, $nk = lk' \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} n \mid lk' \\ l \mid lk' \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{ΕΚΠ}(n,l) \mid lk' = nk$$

<u>π.χ.</u> $H=4\mathbb{Z}$, $K=6\mathbb{Z}$, $G=\mathbb{Z}$

• $4\mathbb{Z}+6\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = (4,6)\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

$k=1$ είναι

$k=0$ είναι

$$2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{2k+6\mathbb{Z} \mid k\in\mathbb{Z}\} = \{2k+6\mathbb{Z} \mid k=0,1,2\} \cong \mathbb{Z}_3$$

έχει 3 συμπλόκα είναι ισόμορφη με την $\mathbb{Z}_3$

• $4\mathbb{Z}+6\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong 4\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}\cap 4\mathbb{Z} = 4\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

$$4\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} = \{4k+12\mathbb{Z} \mid k\in\mathbb{Z}\} = \{4k+12\mathbb{Z} \mid k=0,1,2\} \cong \mathbb{Z}_3$$

$$\mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$$

<u>Πεπερασμένες αβελιανές</u>

$|G| = n < \infty$ αβελιανή

Οι κυκλικές είναι οι πιο απλές αβελιανές

κυκλικές: $\mathbb{Z}_n$ π.χ. $\mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$

$\mathbb{Z}_{12} \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$

$\mathbb{Z}_{24} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{12} \cong$ $24 = 2^3 \cdot 3$

$\cong \mathbb{Z}_{2^3} \times \mathbb{Z}_3$

$\ncong$

$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$

$\cong$

$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$

$\ncong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \cong$

$\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$ $\boxed{\mathbb{Z}_4 \not\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}$

Παρατηρώ:

$$\mathbb{Z}_{24} \cong \boxed{\mathbb{Z}_{2^3} \times \mathbb{Z}_3} \not\cong \mathbb{Z}_{2^2} \times \mathbb{Z}_6 \cong \boxed{\mathbb{Z}_{2^2} \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3} \not\cong$$

$$\not\cong \boxed{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$$

3

$3 = 2+1$

$3 = 1+1+1$

4

$4 = 3+1$, $2+2$, $4 = 1+2+1$, $4 = 1+1+1+1$

<u>Πεπερασμένες αβελιανές</u>

Θεώρημα: Έστω G αβελιανή τάξης $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k} < \infty$ με $2 \leq p_1 < \dots < p_k$ πρώτοι. Η G είναι ισόμορφη με μια ομάδα μορφής:

$$\mathbb{Z}_{p_1^{t_{1,1}}} \times \mathbb{Z}_{p_1^{t_{1,2}}} \times \mathbb{Z}_{p_1^{t_{1,k_1}}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{t_{2,1}}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_2^{t_{2,k_2}}} \times \dots \times$$

$$\mathbb{Z}_{p_k^{t_{k,1}}} \times \mathbb{Z}_{p_k^{t_{k,2}}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_k^{t_{k,k_k}}}$$

κάνω όλες τις διαμερίσεις $\forall$ πρώτο

ώστε $t_{i,1}, t_{i,2} + \dots + t_{i,k_i} = n_i$, $0 < t_{i,j} \leq t_{i,j+1}$ για $1 \leq i \leq k$ και $1 \geq j \leq k_i - 1$

$t_{1,1} + t_{1,2} + \dots + t_{1,k_1} = n_1$ όλα οι δυνατοί διαφορετικοί πρώτοι, $t_{i,j} \leq t_{i,j+1}$

Το <u>πλήθος</u> των μη-ισόμορφων αβελιανών ομάδων τάξης n δίνεται από το γινόμενο του πλήθους των διαμερίσεων των εκθετών π.χ. Να βρεθούν όλες οι μη-ισόμορφες αβελιανές τάξης 144.

Λύση

$n=144=2^4 3^2$ άρα $p_1=2$ και $p_2=3$ και $k_1=4, k_2=2$

144 διαιρείται με το 2.

Με $\pi(4)$ συμβολίζουμε το πλήθος των διαμερίσεων του 4.

$\boxed{4,\ 1+3,\ 2+2,\ 1+1+2,\ 1+1+1+1} \xrightarrow{k_1}$

$\pi(4)=5$

$k_2=2$: $\boxed{2,\ 1+1}$ $\pi(2)=2$. Το πλήθος των μη-ισόμορφων αβελιανών ομάδων τάξης 144 είναι $\pi(4)\cdot\pi(2)=5\cdot 2=10$

Γράφω όλες τις μη-ισόμορφες τάξης 2^4:

$\mathbb{Z}_{2^4},\ \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_{2^3},\ \mathbb{Z}_{2^2}\times\mathbb{Z}_{2^2},\ \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_{2^2},\ \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$

Το ίδιο κάνω και με το άλλο:

$\mathbb{Z}_{3^2},\ \mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3$

και παίρνω όλους τους δυνατούς συνδυασμούς.

(πρέπει να βγουν 10.

$\mathbb{Z}_{2^4}\times\mathbb{Z}_{3^2}$, 1 $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_{2^3}\times\mathbb{Z}_{3^2}$, 2 $\mathbb{Z}_{2^2}\times\mathbb{Z}_{2^2}\times\mathbb{Z}_{3^2}$, 3 $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_{2^2}\times\mathbb{Z}_{3^2}$,

$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_{3^2}$, 4 έχουμε:

① $\cong \mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_{8} \cong \mathbb{Z}_{2} \times \mathbb{Z}_{72}$

② $\cong \mathbb{Z}_{4} \times \mathbb{Z}_{36}$

③ $\cong \mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_{2} \times \mathbb{Z}_{4} \cong \mathbb{Z}_{2} \times \mathbb{Z}_{2} \times \mathbb{Z}_{36}$

④ $\cong \mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_{2} \times \mathbb{Z}_{2} \times \mathbb{Z}_{2}$

για τον άλλο συνδυασμό έχουμε:

$\mathbb{Z}_{2^4} \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{2^3} \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_{2^2} \times \mathbb{Z}_{2^2} \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$

$\cong \mathbb{Z}_{48} \times \mathbb{Z}_3$ $\quad$ $\cong \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{2^3} \times \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{24}$ $\quad$ $\cong \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{2^2} \times \mathbb{Z}_3$

$\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{24}$ $\quad$ $\cong \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{12}$

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{2^2} \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$

$\cong$

$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{2^2} \times \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_3$

$\cong \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{12}$

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \cong$

$\cong \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.